Concours Centrale - Supélec 1994

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Option TA

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour simplifier, les axes $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$, $(O;\vec{k})$ et les plans $(O;\vec{i},\vec{j})$, $(O;\vec{j},\vec{k})$, $(O;\vec{i},\vec{k})$ de R seront notés respectivement Ox, Oy, Oz, xOy, yOz et zOx.

Le problème a pour objet d'étudier la surface Σ de $\mathscr{E}$ définie paramétriquement par :

$$\overrightarrow{OM(t,u)} = \overrightarrow{OA(t)} + u\overrightarrow{I(t)} \qquad (t,u) \in \mathbb{R}^2 \qquad (1)$$

où $\overrightarrow{OA(t)} = \sin t(\vec{j}+\vec{k})$ et $\overrightarrow{I(t)} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$.

0.A - **Question préliminaire**. Expliciter les coordonnées de $M(t,u)$.

Partie I.- Étude des "courbes coordonnées" de Σ

I.A - Danc cette question, t est fixé. $M(t,u)$ décrit alors, quand u varie dans $\mathbb{R}$, une courbe $\Delta(t)$. Montrer que $\Delta(t)$ est une droite parallèle au plan xOy.

I.B - Dans cette question, u est fixé. $M(t,u)$ décrit alors, quand t varie dans $\mathbb{R}$, une courbe $\Gamma(u)$.

I.B.1) Quelle est la nature de la projection orthogonale $\gamma_1(u)$ de $\Gamma(u)$ sur le plan xOy ? Dans le cas où $\gamma_1(u)$ est une ellipse, on précisera son axe focal.

I.B.2) Quelle est nature de la projection orthogonale $\gamma_2(u)$ de $\Gamma(u)$ sur le plan yOz ?

I.B.3) Quelle est la nature de la projection orthogonale $\gamma_3(u)$ de $\Gamma(u)$ sur le plan zOx ? Dans le cas où $\gamma_3(u)$ est une ellipse, on précisera son axe focal.

I.B.4) On considère le repère $R' = (O;\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ de $\mathscr{E}$ défini par :

$$\vec{i}' = \vec{i} \qquad (2)$$

$$\sqrt{(1+u)^2+1}\,\vec{j}' = (1+u)\vec{j} + \vec{k} \qquad (3)$$

$$\vec{k}' = \vec{i}' \wedge \vec{j}' \qquad (4)$$

Déterminer les coordonnées de $M(t,u)$ dans R' et en déduire la nature de $\Gamma(u)$. $\Gamma(u)$ peut-elle être un cercle ?

Partie II. - Étude des plans tangents à Σ

II.A - Déterminer les points singuliers de Σ, c'est-à-dire les points $M(t,u)$ tels que

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}(t,u) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(t,u) = \vec{0} \qquad (5)$$

II.B - On suppose, dans cette question que $\cos t \neq 0$.

II.B.1) Écrire une équation du plan tangent $\Pi(t,u)$ à Σ en $M(t,u)$.

II.B.2) On note $H(t,u)$ le point tel que

$$\overrightarrow{OH(t,u)} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}(t,u) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(t,u) \qquad (6)$$

Déterminer l'ensemble des points $H(t,u)$ quand u varie dans $\mathbb{R}$, t étant fixé.

En déduire que, quand $M(t,u)$ parcourt $\Delta(t)$, $\Pi(t,u)$ coïncide successivement avec chacun des plans passant par $\Delta(t)$ sauf l'un d'entre eux, noté Π_0, que l'on précisera.

II.B.3) Soit $M_1(t)$ le point de $\Delta(t)$ où le plan tangent est perpendiculaire à Π_0. Montrer que l'ensemble Ω des points $M_1(t)$ peut être défini paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ z = \sin t \\ t \neq \pi/2 \,(\mathrm{mod}\,\pi) \end{cases} \qquad (7)$$

II.B.4) Tracer sommairement les projections orthogonales ω_1, ω_2, ω_3 de Ω sur les plans xOy, yOz et zOx.

II.C - On suppose, dans cette question, t fixé tel que $\cos t \neq 0$. Que peut-on dire des plans tangents $\Pi(t, u)$ aux points $M(t, u)$ quand u décrit $\mathbb{R}^*$?

Partie III. - Interprétation géométrique de Σ

III.A - Déterminer l'intersection de Σ avec le plan zOx.

III.B - Déterminer l'intersection de Σ avec le plan yOz.

III.C - En déduire que Σ est l'ensemble des droites parallèles au plan xOy qui coupent un cercle fixe C et une droite fixe D. Préciser C et D.

III.D - On considère la partie Σ_0 de Σ définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -1 \leq u \leq 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Calculer la longueur l_0 de l'arc Ω_0 de la courbe Ω (voir II.B.3) contenu dans Σ_0. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l_0.

III.E - Calculer le volume délimité par Σ_0, le plan yOz et le plan zOx.

Partie IV.- Équation cartésienne de Σ

IV.A - Montrer que Σ est contenue dans la surface Σ' d'équation cartésienne :

$$x^2z^2 + (z^2 - 1)(y - z)^2 = 0 \qquad (9)$$

IV.B - Déterminer l'ensemble des points de Σ' qui n'appartiennent pas à Σ.

••• FIN •••